HISTORIA MATHEMATICA **12** (1985), 6–24

La tablette babylonienne AO 17264 du Musée du Louvre et le problème des six frères

MAURICE CAVEING

Centre National de la Recherche Scientifique, 13, Boulevard Beaumarchais, 75004 Paris, France

Cette tablette ne contient qu'un seul problème, dans lequel on demande de partager l'aire d'un trapèze en six parts, égales par paires, qu'il s'agit de déterminer au moyen de la longueur de leurs côtés. La solution est constituée par un ensemble de dix-neuf nombres entiers. Comment celui-ci a-t-il été construit? L'analyse du texte montre que la trichotomie initiale du trapèze est rattachée à un calcul arbitraire, que le calculateur a probablement recherché sans y parvenir, la plus petite solution, et que les "triplets pythagoriques" jouent un rôle essentiel. On possède ainsi un témoignage instructif sur les ambitions et les limites de la "mathématique" babylonienne. © 1985 Academic Press, Inc.

This tablet contains only one problem, that of dividing a Trapezium in six parts, equal two by two, and determined by the length of their sides. The solution is given in terms of nineteen integers. How was this solution found? Analysis of the text shows that the initial trichotomy of the trapezium was produced by an arbitrary calculation, that the calculator probably tried, without success, to provide a minimal solution, and that pythagorean triplets were central. We thus have instructive evidence about the ambitions and limits of Babylonian mathematics. © 1985 Academic Press, Inc.

Diese Tafel enthält nur eine einzige Aufgabe: Es wird verlangt, die Fläche eines Trapezes in sechs paarweise gleiche Teile zu teilen, die mit Hilfe der Seitenlängen zu bestimmen sind. Die Lösung besteht aus einer Menge von 19 ganzen Zahlen. Wie wurden diese konstruiert? Die Textanalyse lehrt, daß die ursprüngliche Dreiteilung des Trapezes auf willkürliche Weise vorgenommen wurde, daß der Rechner wahrscheinlich nach der kleinsten Lösung gesucht hat, ohne sie zu finden, und daß die pythagoreischen Zahlentripel dabei eine wesentliche Rolle spielen. Man hat es daher bei dieser Tafel mit einem instruktiven Beispiel für die Ambitionen und für die Grenzen der babylonischen "Mathematik" zu tun. © 1985 Academic Press, Inc.

Cette tablette, qui présente un grand intérêt pour l'appréciation des caractères de la "mathématique babylonienne" provient d'Uruk (actuellement Warka) et appartient peut-être à la période dite "kassite": celle-ci s'étend du XVIè. au XIIè. siècles avant J.-C. A la différence de nombreuses autres tablettes qui contiennent des séries de problèmes, celle-ci n'en contient qu'un seul, fort long, accompagné de la solution: il roule sur le partage entre six frères d'un champ ayant la forme d'un trapèze. Le texte a été publié et traduit par Thureau-Dangin et par Neugebauer. Nous citerons la traduction de Thureau-Dangin [1934, 61; 1938, 74–76], qui ne présente pas de différences importantes avec celle de Neugebauer [1935, 126–134]. Nous intercalerons les explications nécessaires entre les sections du texte, en transcrivant les nombres, comme d'usage, dans notre écriture sexagésimale.

0315-0860/85 $3.00

Un [trapèze]: 2,15; le côté supérieur; 1,21; le côté inférieur; 3,33; le front supérieur; 51; le front inférieur. Six frères: l'aîné et le second sont égaux; le troisième et le quatrième sont égaux; le cinquième et le sixième sont égaux. Que sont les limites: [c'est-à-dire] les transversales et les "descendantes"?

Les deux "fronts" étant inégaux, il ne peut s'agir d'un rectangle, figure pour laquelle ces termes sont aussi employés: ce sont ici les "bases" parallèles du trapèze. Les deux côtés non parallèles sont appelés, dans le texte, "flancs" (traduit ici par "côté"), comme pour les rectangles. Les "transversales" sont des parallèles aux bases. Les "descendantes" sont les segments découpés par les transversales sur les côtés. Le terrain est divisé en six parts, par les transversales, de façon que les deux premières soient de superficie égale, etc., . . . , la part de l'aîné étant contigüe à la grande base. Il y a donc cinq transversales, que nous désignerons par a_n ($n = 1, \ldots, 5$). Mais, comme les transversales a_2 et a_4 ne sont pas données, le problème est indéterminé (sauf si l'on pouvait y reconnaître une clause de partage proportionnel pour les paires (1,2), (3,4), (5,6) de frères, que les contemporains auraient connue, mais la suite montrera que ce n'est probablement pas le cas).

Examinons ce trapèze $ABCD$ (Fig. 1): soit $ABEF$ le rectangle de même hauteur construit sur la base AB; posons: $AB = a$, $CD = b$, $AC = c$, $BD = d$, $EC = x$, $DF = y$. Les conditions suivantes doivent être réalisées:

$$\begin{cases} c^2 - x^2 = d^2 - y^2 \\ x + b + y = a \end{cases}$$

En remplaçant par les valeurs numériques des données, écrites décimalement:

$$\begin{cases} 135^2 - x^2 = 81^2 - y^2 \\ x + 51 + y = 213 \end{cases}$$

ou:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 135^2 - 81^2 = 18\,225 - 6\,561 = 11\,664 \\ x + y = 213 - 51 = 162. \end{cases}$$

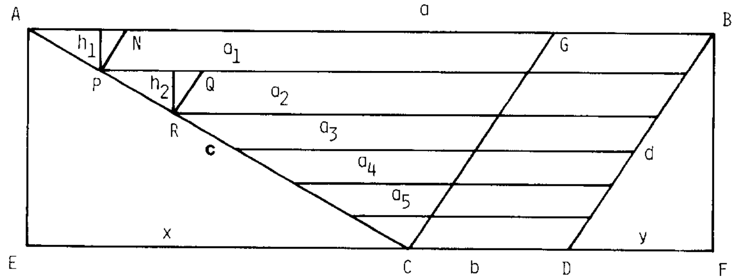

FIGURE 1

En divisant la première de ces équations par la seconde, on obtient:

$$x - y = \frac{11\ 664}{162} = 72,$$

et par suite:

$$\left.\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right\} = \frac{162}{2} \pm \frac{72}{2} = 81 \pm 36 = \left\{\begin{matrix} 117 \\ 45 \end{matrix}\right. .$$

Les autres textes mathématiques babyloniens qui nous sont parvenus, et cela depuis l'époque, antérieure, de la première dynastie babylonienne (XVIIIè. siècle), donnent la certitude que le calcul précédent était à la portée des scribes mathématiciens babyloniens et parfaitement connu d'eux.

Comme on voit, ce calcul est indépendant de la hauteur, dont la valeur est:

$$\sqrt{6\ 561 - 45^2} = \sqrt{4\ 536} = \sqrt{2^3 3^4 7},$$

irrationnelle. On peut donc supposer que celle-ci a été tenue entièrement en dehors du problème. On note d'autre part que x et y ont des valeurs entières.

La procédure débute par le calcul des transversales indéterminées a_2 et a_4, et voici comment:

> Toi, en opérant, additionne 3,33; le front supérieur, et 51; le front inférieur: cela fera 4,24;. D'autre part, sépare la partie de 2,15; le côté, cela fera 0;0,26,40. Porte 0;0,26,40 à 1,21; le côté inférieur, cela fera 0;36. Ajoute 0;36 à 4,24; cela fera 4,24;36. D'autre part, additionne 2,15; le côté supérieur, et 1,21; le côté inférieur, cela fera 3,36;. Fractionne en deux 3,36; cela fera 1,48;. Sépare la partie de 1,48; cela fera 0;0,33,20. Porte 0;0,33,20 à 4,24;36, cela fera 2;27: 2,27; est la deuxième transversale.

Le dernier résultat est 2;27, mais il semble être implicitement multiplié par 60, car la vraisemblance exige 2,27; (nous rappelons que dans le texte cunéiforme ces deux nombres ne se distinguent pas puisqu'il n'y a ni la virgule qui nous sert à séparer les tranches sexagésimales, ni le point-et-virgule qui nous sert à marquer les unités).

Rappelons que:

$$\begin{aligned} 3{,}33; &= a \\ 51; &= b \end{aligned} \qquad b < a,$$

$$\begin{aligned} 2{,}15; &= c \\ 1{,}21; &= d \end{aligned} \qquad d < c.$$

La procédure ci-dessus équivaut à appliquer la "formule":

$$a_2 = \left(a + b + \frac{d}{c}\right) \times \frac{2}{c + d} \times 60.$$

Aucun commentateur n'a trouvé d'interprétation pour une telle formule. On peut noter toutefois, en se limitant aux valeurs numériques particulières au problème, que:

$$\frac{2 \cdot 60}{c + d} = \frac{120}{216} = \frac{5}{9},$$

et que:

$$\frac{d}{c} = \frac{81}{135} = \frac{3}{5};$$

donc:

$$a_2 = \frac{5}{9}\left(a + b + \frac{3}{5}\right) = \frac{5}{9}(a + b) + \frac{1}{3}.$$

Le texte se poursuit par le calcul de a_4:

D'autre part, 2,15; le côté supérieur, excède de combien 1,21; le côté inférieur? Il excède de 54;. Retranche 54; de 2,27; la deuxième transversale: 1,33; est le reste. 1,33; le reste, est la quatrième transversale.

Autrement dit:

$$a_4 = a_2 - (c - d),$$

ou:

$$a_2 - a_4 = (c - d).$$

Viennent ensuite les calculs de: a_1, a_3, a_5:

Carre 3,33; le front supérieur, cela fera 12,36,9; D'autre part, carre 2,27; la deuxième transversale, cela fera 6,0,9; Additionne 6,0,9; et 12,36,9; cela fera: 18,36,18;. Fractionne en deux 18,36,18; cela fera: 9,18,9;. Extrais la racine, cela fera: 3,3;. 3,3; est la transversale supérieure.

C'est-à-dire:

$$a_1 = \sqrt{\frac{a^2 + a_2^2}{2}}.$$

Ce calcul est exact. En effet, les conditions imposées sont de partager en deux aires égales l'aire comprise entre a et a_2. En désignant (Fig. 1) par h_1 et h_2, les hauteurs des deux trapèzes issus du partage, ces conditions s'écrivent:

$$\frac{a + a_1}{2} h_1 = \frac{a_1 + a_2}{2} h_2,$$

ou:

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{a + a_1}{a_1 + a_2}. \qquad \text{(I)}$$

D'autre part, des triangles semblables tels que ANP et PQR, permettent d'écrire:

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{PQ}{AN} = \frac{a_1 - a_2}{a - a_1}. \tag{II}$$

En comparant les égalités (I) et (II), on obtient:

$$\frac{a + a_1}{a_1 + a_2} = \frac{a_1 - a_2}{a - a_1}$$

d'où l'on tire:

$$a^2 - a_1^2 = a_1^2 - a_2^2,$$

$$2a_1^2 = a^2 + a_2^2,$$

$$a_1 = \sqrt{\frac{a^2 + a_2^2}{2}},$$

ce qui est la formule du texte.

Les transversales a_3 et a_5 sont calculées par la même formule:

> [Carre] 2,27; la deuxième transversale, cela fera 6,0,9; D'autre part, [carre] 1,33; la quatrième transversale, cela fera 2,24,9;. [Additionne] 2,24,9; et 6,0,9; cela fera 8,24,18;. Fractionne en deux 8,24,18; cela fera 4,12,9; Extrais la racine, cela fera 2,3;. 2,3; est la troisième transversale.

C'est-à-dire:

$$a_3 = \sqrt{\frac{a_2^2 + a_4^2}{2}}.$$

> D'autre part, carre 1,33; la quatrième transversale, cela fera 2,24,9; D'autre part, carre 51; le front inférieur, cela fera 43,21;. Additionne 43,21; et 2,24,9; cela fera 3,7,30;. Fractionne en deux 3,7,30; cela fera 1,33,45;. Extrais sa racine, cela fera 1,15;. 1,15; est la cinquième transversale.

$$a_5 = \sqrt{\frac{a_4^2 + b^2}{2}}.$$

La troisième partie du texte contient le calcul des 12 descendantes: les 6 "descendantes supérieures", c'est-à-dire prises sur le côté c, et les 6 "descendantes inférieures", prises sur le côté d, que nous désignerons respectivement par m_1, $m_2, \ldots, m_6$, et $n_1, n_2, \ldots, n_6$.

> D'autre part, 3,33; le front [supérieur] excède 51; le front inférieur, de combien? Il excède de 2,42;. Sépare la partie de 2,42; cela fera 0;0,22,13,20. D'autre part, 3,33; excède 3,3; la transversale [supérieure], de combien? Il excède de 30;. Porte 30; à 0;0,22,13,20, cela fera 0;11,6,40. Porte 0;11,6,40 à 2,15; le côté supérieur, et 1,21; le côté inférieur, cela fera 25; et 15;. 25; est la descendante supérieure, 15; la descendante inférieure.

Autrement dit:

$$\left.\begin{aligned} m_1 &= c \\ n_1 &= d \end{aligned}\right\} \times \frac{a - a_1}{a - b}.$$

Ce calcul est exact, car il revient à poser:

$$\frac{m_1}{c} = \frac{a - a_1}{a - b},$$

c'est-à-dire (Fig. 1):

$$\frac{AP}{AC} = \frac{AN}{AG},$$

PN et CG étant tracés parallèles à BD. En substituant d à c, la même formule donne n_1.

Les autres descendantes sont calculées de même:

D'autre part, 3,3; la transversale supérieure, excède 2,27; la deuxième transversale, de combien? Elle excède de 36; Porte 36; à 0;0,22,13,20, cela fera 0;13,20. Porte 0;13,20 à 2,15; le côté supèrieur, et 1,21; le côté inférieur, cela fera 30; et 18;. 30; est la deuxième descendante supérieure, 18; la deuxième descendante inférieure.

$$\left.\begin{aligned} m_2 &= c \\ n_2 &= d \end{aligned}\right\} \times \frac{a_1 - a_2}{a - b}.$$

D'autre part, 2,27; la deuxième transversale, excède 2,3; la troisième transversale, de combien? Elle excède de 24; Porte 24; à 0;0,22,13,20: 0;8,53,20. Porte 0;8,53,20 à 2,15; le côté supérieur, et 1,21; le côté inférieur: cela fera 20; et 12;:20; est la [troisième] descendante supérieure, 12; la [troisième] descendante inférieure.

$$\left.\begin{aligned} m_3 &= c \\ n_3 &= d \end{aligned}\right\} \times \frac{a_2 - a_3}{a - b}.$$

Les trois dernières descendantes, comme les premières, tu calculeras. Telle est la façon d'opérer.

$$\left.\begin{aligned} m_i &= c \\ n_i &= d \end{aligned}\right\} \times \frac{a_{i-1} - a_i}{a - b}.$$

Le problème est alors terminé. Les résultats numériques sont les suivants:

$a = 3,33;$	(213)	$m_1 = 25$	$n_1 = 15$
$a_1 = 3,3;$	(183)	$m_2 = 30$	$n_2 = 18$
$a_2 = 2,27;$	(147)	$m_3 = 20$	$n_3 = 12$
$a_3 = 2,3;$	(123)	$m_4 = 25$	$n_4 = 15$
$a_4 = 1,33;$	(93)	$m_5 = 15$	$n_5 = 9$
$a_5 = 1,15;$	(75)	$m_6 = 20$	$n_6 = 12$
$b = 51;$	(51)	$c = 2,15;$ (135)	$d = 1,21;$ (81)

Le calcul de $m_4, m_5, m_6, n_4, n_5, n_6$, est presque immédiat, car les différences $a_{i-1} - a_i$ sont respectivement égales à 30, 18, 24, alors que les trois premières différences sont respectivement égales à 30, 36, 24. Il s'ensuit que:

$$m_1 = m_4, \qquad m_2 = 2m_5, \qquad m_3 = m_6, \qquad d^o \text{ pour } n_i.$$

COMMENTAIRE

Le problème comprend trois séries de calculs:

(I) Le calcul des transversales a_2 et a_4, qui achève de déterminer le problème;

(II) le calcul des autres transversales;

(III) le calcul des descendantes.

Les calculs (II) et (III) sont corrects et exacts. Le calcul (I) utilise une formule insolite, corrigée *in extremis* par un facteur 60. Cependant, l'exactitude des calculs (II) et (III) nous interdit, en première hypothèse, de considérer les formules du calcul (I) comme simplement erronées. Il nous paraît préférable de rechercher l'intention qui a présidé à leur emploi, en étudiant les valeurs numériques obtenues.

Rappelons donc les formules utilisées:

$$a_2 = \frac{5}{9}(a + b) + \frac{1}{3}$$

$$a_4 = a_2 - (c - d).$$

Considérons les différences entre a, a_2, a_4, b:

		Diff. 1è.	Diff. 2è.	Diff. 3è.
a	213 (=3 × 71)			
		66 (= 6 × 11)		
a_2	147 (=3 × 7^2)		6 × 2	
		54 (= 6 × 9)		0
a_4	93 (= 3 × 31)		6 × 2	
		42 (= 6 × 7)		
b	51 (= 3 × 17)			

On a donc, numériquement:

$$(a - a_2) - (a_2 - a_4) = (a_2 - a_4) - (a_4 - b),$$

ou:

$$(a - b) = 3(a_2 - a_4) = 3(c - d).$$

D'autre part, le tableau montre immédiatement que:

$$a = b + 6(7 + 9 + 11) = b + 6 \times 27 \qquad \text{ou } a + b = 2b + 6 \times 27$$

et que:

$$a_2 = b + 6(7 + 9) = b + 6 \times 16 \qquad \text{ou } 2a_2 = 2b + 6 \times 32.$$

On tire de là:

$$2a_2 = a + b + 6(32 - 27) = a + b + 30.$$

Or: $a + b = 264$, et quelle est la fraction de 264 la plus proche de 30? C'est le neuvième, car $29\frac{1}{3} \times 9 = 264$, et il reste sur 30: $\frac{2}{3}$. On peut donc écrire:

$$2a_2 = a + b + \frac{a + b}{9} + \frac{2}{3},$$

d'où:

$$a_2 = \frac{5}{9}(a + b) + \frac{1}{3},$$

ce qui est la "formule" résultant des prescriptions du scribe. Quant à la "formule" pour a_4, elle résulte simplement de l'observation que la différence entre les côtés est égale à la différence entre les deux transversales.

Une investigation dans le domaine géométrique montre qu'on ne trouve pas d'interprétation pour ces expressions. On pourrait s'en servir pour effectuer des constructions géométriques, mais il faudrait que les figures soient faites à l'échelle après définition d'une unité; dans ce cas la mise en place de a_2 et a_4 est bien plus aisée en utilisant les segments m_i et n_i. Il ne s'agit donc que de l'exploitation d'une suite de relations numériques particulières pour retrouver les nombres qui figurent au tableau ci-dessus et déterminer ainsi complètement le problème.

Il semble donc que le système de nombres entiers qui apparaît dans ce problème a été construit en premier lieu, et que c'est ensuite seulement que le calculateur babylonien s'est préoccupé de rattacher aux données du problème les valeurs prévues pour a_2 et a_4, par une suite de manipulations qui, à nos yeux, est mathématiquement injustifiable.

Thureau-Dangin écrit à ce propos:

> Je serais porté à croire que le texte, dans la forme où il nous est parvenu, est le résultat d'un remaniement. Il paraît probable que dans la rédaction primitive, les deuxième et quatrième lignes de séparation (= "transversales") étaient données et non calculées. [1934, 67; 1938, 75, n. 2]

Une telle hypothèse est naturellement toujours possible, mais il faut reconnaître qu'elle ne fait guère que déplacer la question. En effet, si le texte a été remanié, il demeure que le remaniement s'est fait dans le sens de l'introduction des procédures aberrantes que nous venons de décrire, et cela même demande explication. Rien ne nous oblige à penser que le calcul en cause soit une addition fantaisiste et fautive d'un copiste postérieur. On peut y voir aussi une application d'une certaine conception des nombres, qui consiste à repérer les propriétés des entiers pris concrètement dans leur individualité, et à inventer des combinaisons d'opérations aboutissant à des valeurs fixées par avance, présente dès le texte primitif. La question que se pose le calculateur serait alors: quelle suite d'opérations arithmétiques conduit à tel nombre? alors que la question normale est: quel nombre résulte de telle suite d'opérations? Mais il est possible qu'une conduite mathématique aussi arbitraire ait une signification cachée: elle serait alors une manière d'indiquer que le problème est, en soi, indéterminé et que les valeurs de a_2 et de a_4 sont choisies dans un tableau *ad hoc*.

Neugebauer présente une différence de traduction avec Thureau-Dangin: dans l'énoncé des questions, à la fin du premier paragraphe, au lieu de "limites", il comprend "surfaces" et voit là une question s'ajoutant aux autres. Puis il constate que les aires ne sont nulle part dans le texte calculées:

Die Berechnung der Teilgebiete ist leider im Text unterblieben. [1935, 131]

Le calcul auquel il se livre aboutit aux valeurs approchées suivantes:

$$S_1 = S_2 \simeq 41,9;30$$

$$S_3 = S_4 \simeq 22,27;$$

$$S_5 = S_6 \simeq 10,28;36.$$

Ces nombres sont difficiles à interpréter. Toutefois le point important, nous l'avons dit, est que la hauteur du trapèze est irrationnelle: or, les hauteurs partielles sont à la hauteur totale dans le rapport:

$$\frac{h_i}{h} = \frac{a_{i-1} - a_i}{a - b},$$

rapport qui, étant donné les valeurs de a, b, a_i, est toujours rationnel; par suite, les hauteurs partielles sont, comme la hauteur totale, toutes irrationnelles. Par conséquent, toutes les aires, totale ou partielles, de ce trapèze, sont irrationnelles. Nous pensons que les calculs du scribe évitent ces grandeurs et que, de même que les hauteurs n'interviennent nulle part, de même le calcul des aires ne figure pas dans le problème, ni dans l'énoncé. Le partage ne répond donc pas, du moins ici, à des normes juridiques de proportions entre les aires des parts de six héritiers. Il s'agit d'un problème "désintéressé" et purement "théorique", portant sur des combinaisons de valeurs entières.

En ce qui concerne le calcul de a_4, Neugebauer pense qu'il s'explique par une progression arithmétique entre des éléments des trois surfaces dont chacune doit être divisée en deux parties égales. Il trouve cette progression dans les sommes des "descendantes", correspondant à ces trois surfaces, en effet:

$$m_1 + m_2 = 55 \qquad n_1 + n_2 = 33$$

$$m_3 + m_4 = 45 \qquad n_3 + n_4 = 27$$

$$m_5 + m_6 = 35 \qquad n_5 + n_6 = 21.$$

Ces sommes sont évidemment proportionnelles aux différences: $a - a_2$, $a_2 - a_4$, $a_4 - b$, que nous avons mises en évidence dans le tableau de nombres ci-dessus, et elles sont d'ailleurs calculées au moyen de ces différences. Leur progression est une conséquence de la progression des différences et non l'inverse. Il n'est nullement besoin de passer par elles pour aboutir à: $a_2 - a_4 = \frac{1}{3}(a - b)$, c'est-à-dire: $= (c - d)$.

En ce qui concerne le calcul de a_2, Neugebauer tente sans succès et sans trop y croire une explication par la formule:

$$a_2^2 = a^2 - \frac{S_1}{S}(a^2 - b^2),$$

ou S_1 désigne l'aire comprise entre a et a_2, et S l'aire totale; cette formule découle de la proportionalité entre les différences $(a - a_2)$, $(a - b)$, et les hauteurs respectives. Malheureusement, le calcul des aires, nous l'avons vu, ne figure pas dans le texte, et la formule ne correspond pas aux calculs indiqués. Il en est de même si on utilise pour S la formule très approchée

$$S = \frac{a + b}{2} \times \frac{c + d}{2}.$$

Mais, il y a plus grave: les aires et les hauteurs étant, nous le savons, irrationnelles, la formule, d'ailleurs inopérante, de Neugebauer, implique l'extension de la proportionalité à des grandeurs quelconques, rationnelles ou non. Il nous a semblé, au contraire, que les irrationnelles étaient tenues hors du calcul. Neugebauer suggère finalement que le calcul que nous possédons peut être une corruption d'un calcul antérieur, mal compris par un imitateur.

E. M. Bruins écrit:

> A mon avis, il ne faut pas attribuer aux mathématiciens babyloniens la connaissance de la théorie géométrique des proportions, bien qu'ils montrent des relations numériques qui correspondent aux théorèmes de cette théorie. [Bruins 1952, 15–16]

Et il montre que le calcul d'une transversale t se fait facilement, en utilisant l'additivité des aires, par la formule:

$$t = \frac{ah_2 + bh_1}{h} = a - \frac{(a - b)h_1}{h}$$

(h_1 = distance de a à t, h_2 = distance de t à b, $a > b$, $h = h_1 + h_2$). Malheureusement, dans notre problème, où les hauteurs sont irrationnelles, on ne se sert pas de cette formule pour le calcul de a_2 et de a_4. Par contre la formule des transversales a_1, a_3, a_5, qui partagent un trapèze en deux aires égales, peut, comme le remarque Bruins, s'en tirer aisément. On a en effet:

$$a - t = \frac{(a - b)h_1}{h}$$

d'où:

$$h_1 = h\,\frac{a - t}{a - b}$$

et:

$$h_2 = h\,\frac{t - b}{a - b}.$$

Or, si les aires découpées par t sont égales, la relation suivante l'exprime:

$$(b + t)h_2 = (t + a)h_1,$$

et, en portant les valeurs de h_1, h_2, dans cette relation, on obtient:

$$(b + t)(t - b)\frac{h}{a - b} = (t + a)(a - t)\frac{h}{a - b}$$

$$bt + t^2 - b^2 - bt = at - t^2 + a^2 - at$$

$$t^2 - b^2 = a^2 - t^2$$

$$2t^2 = a^2 + b^2, \qquad \text{ou } t = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}},$$

ce qui est la formule du scribe [1].

Si nous poussons plus loin l'analyse des nombres qui entrent dans ce problème, nous trouvons la situation suivante:

La figure concernée est un "trapèze rationnel", quant à ses côtés, qu'il s'agit de diviser, par des transversales rationnelles, découpant sur ses côtés des segments rationnels, telles que leurs différences soient progressives, et que les six aires partielles soient deux à deux égales.

Les nombres des cinq transversales et des quatre côtés contiennent tous le facteur 3. Il semble que cela soit nécessaire pour que les segments découpés sur les côtés aient des mesures entières: en effet, $m_1 = m_4 = 25$, $m_3 = m_6 = 20$, ne contiennent pas ce facteur, mais sont les seuls dans ce cas. Si donc on néglige la mesure des descendantes, on peut considérer ce trapèze comme réductible au tiers et, par cette réduction, on obtient un nouveau trapèze, de dimensions:

$$\begin{array}{llll} a' = 71 & c' = 45 & a_2' = 49 & a_1' = 61 \\ b' = 17 & d' = 27 & a_4' = 31 & a_3' = 41 \\ & & & a_5' = 25. \end{array}$$

Les segments EC et DF [Fig. 2] mesurent alors respectivement 39 et 15. Ce trapèze peut être décomposé en un parallèlogramme $GBCD$ et un triangle ACG, lequel a pour mesures:

	Différ.
$a'' = a' - b' = 71 - 17 = 54$	
$(= EC + DF = 39 + 15)$	
	22
$a_2'' = 49 - 17 = 32$	
	18
$a_4'' = 31 - 17 = 14$	
	14
$b'' = 17 - 17 = 0$	
$c'' = c' = 45$	
$d'' = d' = 27.$	

Comment ce triangle a-t-il été trouvé? Une nouvelle réduction, par division par 3, en négligeant cette fois a_2'' et a_4'', conduit à:

$$a''' = 18, \qquad c''' = 15, \qquad d''' = 9.$$

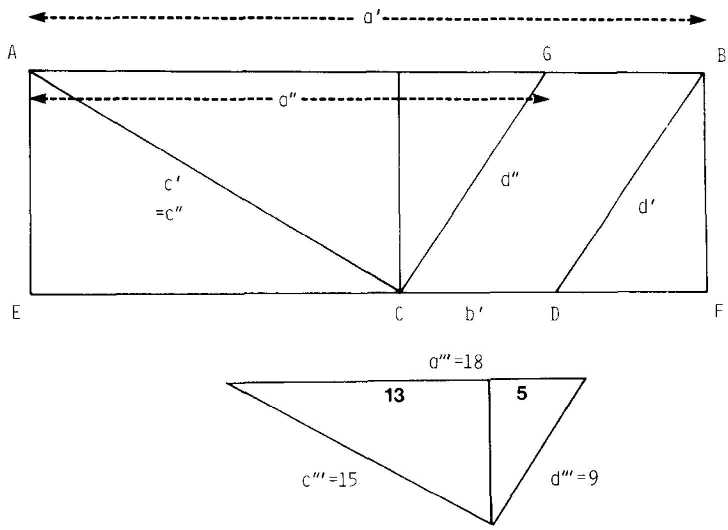

FIGURE 2

Mais les segments EC et DF se réduisent alors aux mesures 13 et 5 qui sont nombres premiers. Ces nombres mesurent aussi les segments découpés sur $a''' = 18$ par la hauteur relative à ce côté et, par les deux triangles rectangles en lesquels cette hauteur partage notre triangle ainsi réduit, existe la relation:

$$15^2 - 13^2 = 9^2 - 5^2.$$

Cette décomposition et cette nouvelle réduction sont-elles superflues? La suite de la recherche va nous le dire.

La véritable question en effet que pose ce texte est de découvrir comment les Babyloniens ont trouvé les nombres qui entrent dans le problème. La clef de l'énigme doit être cherchée dans la formule qui permet le calcul d'une transversale t partageant un trapèze de bases a, b, en deux aires égales:

$$2t^2 = a^2 + b^2.$$

Les carrés parfaits a^2, t^2, b^2 doivent être en progression arithmétique [2]. La solution consiste évidemment à poser:

$$a^2 = p^2 + q^2 + 2pq \qquad a = p + q$$
$$t^2 = p^2 + q^2$$
$$b^2 = p^2 + q^2 - 2pq \qquad b = p - q,$$

t est alors l'hypoténuse d'un triangle rectangle de côtés p et q, et l'on a en effet:

$$2t^2 = 2p^2 + 2q^2 = a^2 + b^2.$$

Nous savons que les formules correspondantes pour élever au carré une somme ou une différence sont connues des Babyloniens. D'autre part, les nombres t, p, q, forment un "triplet pythagorique" et nous savons, grâce à la tablette Plimpton 322 [3] qu'ils effectuaient aussi la construction de tels triplets. Par ailleurs la formule:

$$(a^2 + b^2)^2 = (a^2 - b^2)^2 + (2ab)^2,$$

également connue, fournit, si l'on pose:

$$a = n, \qquad b = 1,$$

le triplet:

$$n^2 + 1, \qquad n^2 - 1, \qquad 2n,$$

ou, avec n impair, ce qui est le cas dans notre problème, comme on va le vérifier:

$$t = \frac{n^2 + 1}{2}, \qquad p = \frac{n^2 - 1}{2}, \qquad q = n.$$

On a dans ces conditions:

$$p + q = \frac{n^2 - 1}{2} + n = \frac{n^2 + 2n - 1}{2}$$

$$p - q = \frac{n^2 - 2n - 1}{2}.$$

Si nous substituons l'impair suivant $n + 2$ dans l'expression de $p - q$, soit:

$$\frac{(n + 2)^2 - 2(n + 2) - 1}{2} = \frac{n^2 + 2n - 1}{2},$$

nous obtenons la valeur de $p + q$, ce qui montre qu'on peut obtenir une suite de trapèzes répondant aux conditions du problème, lesquels peuvent être placés de façon contigüe, la grande base de l'un confondue avec la petite base du suivant.

De la sorte, nous construisons les premiers éléments d'un tableau de nombres illimité:

I	II	III	IV
$q = n$	$p = \frac{n^2 - 1}{2}$	$t = \frac{n^2 + 1}{2}$	$p - q$ / $p + q$
			1
3	4	5	
			7
5	12	13	
			17
7	24	25	
			31
9	40	41	
			49
11	60	61	
			71
13	84	85	
			97
15	112	113	
			127
17	144	145	
			161
...	...	...	...

Les trois premières colonnes fournissent des triplets pythagoriques dont le troisième terme t, hypoténuse du triangle rectangle rationnel, est aussi la mesure de la "transversale" d'un trapèze de bases $p - q$, $p + q$, (4è. colonne), qui le partage en deux aires égales.

Cela étant, nous pensons que, pour obtenir tous les nombres qui figurent dans le problème, le Babylonien s'y est pris de la façon suivante, laquelle peut d'ailleurs être critiquée. Considérant un triangle tel que celui qui est représenté à la Fig. 2, il a cru bon de partir de la relation procurée par le théorème "de Pythagore" qu'il connaît bien:

$$z^2 - x^2 = w^2 - y^2,$$

dans laquelle

$$z = c''', \qquad w = d''', \qquad x + y = a''',$$

avec:

$$z > x, \qquad w > y, \qquad x > y,$$

relation qu'on peut aussi écrire:

$$z^2 - w^2 = x^2 - y^2.$$

Il lui faut trouver quatre nombres tels que la différence des carrés de deux d'entre eux soit égale à la différence des carrés des deux autres. Or, le tableau ci-dessus peut servir à cette fin, car les carrés des nombres de la Col. II sont différences des carrés des nombres des Col. III et I, par exemple:

$$4^2 = 5^2 - 3^2$$

$$12^2 = 13^2 - 5^2,$$

or le rapport de 12 à 4 est 3, et de 12^2 à 4^2, c'est 3^2, d'où:

$$(13^2 - 5^2) = 3^2(5^2 - 3^2) = 15^2 - 9^2,$$

ce qui donne la solution:

$$x = 13, \qquad y = 5, \qquad z = 15, \qquad w = 9.$$

Il en résulte que, dans le triangle de la Fig. 2, on a:

$$x + y = 18, \qquad \text{ce qui mesure la base.}$$

Si l'on considère le triangle comme un trapèze dont la petite base est nulle, on aboutit à ce que, dans le trapèze cherché, la différence des bases doit être 18, ou un multiple de 18. Par suite les nombres de la Col. IV du tableau représenteront des bases des trapèzes contigüs de notre problème, pourvu qu'on choisisse dans cette colonne des nombres tels que la différence de deux bases extrêmes soit congrue à 0 (mod 18).

Il suffit donc de chercher dans le tableau ci-dessus une différence qui remplisse cette condition entre les nombres de la Col. IV:

pour 1, premier nombre de la colonne, les différences avec les successeurs sont:

$$6, 16, 30, 48, 70, 96, 126, 160, \ldots$$

suite qui n'offre pas de solution;

pour 7, le deuxième nombre, les différences avec les successeurs sont:

$$10, 24, 42, 64, 90 = 18 \times 5,$$

nombre qui offrirait une solution pour $5 \times 2 = 10$ frères, car 90 est la cinquième différence,

$$120, 154, \ldots$$

pour 17, le troisième nombre, les différences avec les successeurs sont:

$$14, 32, 54 = 18 \times 3,$$

qui offre une solution pour $3 \times 2 = 6$ frères, puisque 54 est la troisième différence,

$$80, 110, 144 = 18 \times 8,$$

qui offre une solution pour $6 \times 2 = 12$ frères, puisque 144 est la sixième différence.

Considérons le premier cas, qui donne une solution pour 6 frères: comme 54 est le triple de 18, les nombres x, y, z, w doivent être multipliés par 3, soit:

$$x = 39, \qquad y = 15, \qquad z = 45, \qquad w = 27.$$

Les différences ayant été prises à partir de 17, la suite de 4 nombres commençant à 17 dans la Col. IV:

$$17, 31, 49, 71,$$

donne les bases et les transversales: b, a_4, a_2, a. Quant aux transversales: a_5, a_3, a_1, leurs valeurs:

$$25, 41, 61,$$

se lisent dans la Col. III en position intermédiaire des nombres de la Col. IV.

On a ainsi tous les nombres correspondant au trapèze de la Fig. 2, c'est-à-dire le trapèze du Babylonien réduit au tiers [4].

On peut remarquer toutefois que d'autres procédures auraient pu être employées. Par exemple, après avoir trouvé le triangle 9, 15, 18, comme il a été indiqué, le Babylonien aurait pu chercher, dans la Col. IV du tableau, des nombres tels que leur différence soit un sous-multiple d'un entier congru à 0 (mod 18). La première solution, pour six frères, est: $31 - 1 = 30$, tiers de $90 = 18 \times 5$. On obtient alors une solution en multipliant (9, 15, 18) par 5, soit (45, 75, 90), et (1, 5, 7, 13, 17, 25, 31) par 3, soit (3, 15, 21, 39, 51, 75, 93). Ces nombres permettent le calcul des "descendantes" en valeurs entières. Les trois derniers figurent dans la suite de nombres de la tablette, où ils représentent b, a_5 et a_4. Cette solution est donc plus petite que celle de la tablette.

Une autre façon de procéder aurait consisté à poser arbitrairement le triangle (3, 5, 6) et à chercher dans la Col. IV du tableau les différences congrues à 0 (mod 6), dont la première, pour six frères, est encore $31 - 1 = 30 = 6 \times 5$, ce qui conduit à multiplier le triangle par 5, soit (15, 25, 30). Si l'on veut donner des valeurs entières aux "descendantes", il faut alors tripler tous les nombres trouvés. La solution obtenue est la même que ci-dessus.

Ainsi le texte montre que le Babylonien n'a procédé d'aucune de ces deux façons. La reconstitution que nous proposons et qui conduit au système de nombres de la tablette, montre que le calculateur ancien s'est embarrassé de conditions inutiles et qu'en outre, s'il a eu en vue la plus petite solution, il a fait preuve de maladresse.

Conclusions

1. D'après notre hypothèse, la construction de ce problème par le Babylonien repose sur la conjonction de deux choses: (a) l' "invention" du triangle (18, 15, 9) dont la base est découpée en deux segments de longueur 13 et 5 par la hauteur afférente, au moyen de la relation:

$$13^2 - 5^2 = 15^2 - 9^2,$$

fournie par les deux premières lignes du tableau de nombres, procédure qui n'était nullement indispensable; (b) la découverte des quatre nombres 17, 31, 49, 71, tels que $71 - 17 = 3 \times 18$, satisfaisant aux conditions de dichotomie imposées aux trapèzes—laquelle découle directement de l'étape (a), sans que le calculateur remarque la solution plus petite. On peut penser cependant que c'était bien cela qu'il avait en vue: le choix du triangle repose sur la comparaison des triplets pythagoriques des deux premières lignes du tableau. Ensuite le Babylonien, s'il n'a pas aperçu la solution la plus petite, a choisi cependant le premier cas, valable pour six frères, d'une différence multiple de 18. Il n'a donc pas réussi à atteindre le but recherché. Mais ce qu'il recherchait, c'était vraisemblablement les plus petits de tous les nombres qui peuvent satisfaire le problème, le paradigme *in minimis* d'une infinité d'autres solutions en nombres proportionnels, ce que les Grecs appelleront le "pythmène" des solutions rationnelles possibles, semblables à un facteur près. Dans la genèse du tableau qui devait lui permettre de déterminer ces nombres, la construction des "triplets pythagoriques" joue un rôle décisif.

2. Les proportions entre nombres sont évidemment connues. Mais il en est de même des proportions entre éléments homologues de figures semblables exprimables rationnellement. Cela résulte non seulement de la façon dont nous pensons que le trapèze a été construit, mais encore explicitement de la procédure indiquée pour le calcul des lignes "descendantes", qui fait appel aux triangles homothétiques. Quant au calcul des transversales qui partagent les aires par moitié, la formule utilisée peut certes dépendre du mode opératoire suggéré par Bruins; mais, puisque le texte utilise ensuite les triangles homothétiques, elle peut aussi avoir

été obtenue par leur moyen de la façon que nous avons indiquée. Dans les deux cas, il faut faire entrer les hauteurs en ligne de compte pour établir la formule, mais il n'y a pas lieu de calculer les hauteurs irrationnelles du problème particulier. L'application d'une formule de routine, établie sans doute sur des exemples rationnels, au cas d'un problème où l'une des lignes impliquée, mais non présente dans la formule elle-même, n'est pas exactement calculable, ne nous paraît pas constituer une généralisation véritable de la notion de proportion.

3. Le calcul de a_2, par contre, n'est certes qu'un artifice numérique, permettant de retrouver un nombre qui doit obéir à une certaine loi. Malgré cette procédure non homogène aux autres, le problème tout entier présente le très grand intérêt de nous révéler une tentative de "géométrie rationnelle" qui cherchait à obtenir les éléments des figures en nombres entiers. Il semble que des procédés aient été mis en oeuvre pour éviter les grandeurs irrationnelles, notamment dans le triangle rectangle, et pour finir des surfaces rectilignes sont déterminées par la longueur de leurs côtés [5]. Il y a donc là un souci d'exactitude numérique et un essai pour bannir les approximations dans les mesures de grandeurs géométriques. Les incohérences relevées témoignent moins du faible niveau de cette mathématique que de l'audace—inconsciente?—de l'entreprise, en quoi réside, à nos yeux, le sens véritable de ces calculs.

4. Il faut souligner l'artificialisme qui règne dans ce texte: si un partage en six parts égales a quelque référence dans la réalité, en revanche ce qui remplace ici la trisection ne correspond, semble-t-il, à aucun partage juridiquement possible. L'affabulation, et même le thème géométrique, ne sont là que comme supports à un problème de nombres entiers. La forme didactique ne doit pas faire illusion non plus: il est douteux qu'aucun élève, cherchant à déterminer les valeurs de a_2 et a_4, découvre jamais par lui-même le procédé indiqué, qui n'a aucune valeur générale. L'ensemble du problème apparait plutôt comme un thème de cours, ou le résumé d'un savoir consigné là à l'intention de gens avertis.

Ce savoir met en oeuvre les diverses tendances, rarement distinguées et le plus souvent entrelacées, de la mathématique babylonienne. On y retrouve certaines des identités quadratiques qui sont à la base de la résolution des problèmes de type "algébrique" qui font l'objet d'autres tablettes, mais elles n'apparaissent ici qu'en position d'instrument subordonné à une fin qui est tout autre. Les formules régissant les calculs de grandeurs dans les figures géométriques sont, elles aussi, mises à contribution. Mais ce n'est là qu'une trame sur laquelle est brodée une recherche d'ordre arithmétique. A ce titre ce problème s'apparente à ceux que présentent d'autres tablettes, et où l'on voit se résoudre des questions de "géométrie rationnelle" à grand renfort de procédures de calcul numérique impliquant des formules "algébriques". Mais ici, bien que nous trouvions intimement mêlés ces trois éléments, il semble bien que l'accent soit mis sur les propriétés de certains entiers et qu'en définitive le but poursuivi s'inscrive, avant la lettre, dans l'horizon d'une théorie des nombres: de ce point de vue le "problème des six frères" ne restera pas sans postérité. C'est pourquoi il peut être regardé, croyons-nous, comme un des points culminants atteints par l' "Arithmétique" babylonienne.

Certes celle-ci n'était pas constituée en discipline autonome, encore moins théorique. Mais, aussi peu qu'elle le fût, et aussi important qu'ait été le développement du calcul "algébrique," l'arithmétique fut peut-être le démon secret de la mathématique babylonienne. Au-delà du souci d'adapter au système sexagésimal les procédés opératoires, s'enracinait plus profond un intérêt pour les nombres eux-mêmes, c'est-à-dire les entiers. Ainsi, dans certains problèmes à thème géométrique ou autre, le calculateur était-il soumis à des contraintes plus strictes que lorsqu'il utilisait des nombres généralisés, c'est-à-dire en l'occurrence, des nombres sexagésimaux fractionnaires. Les entiers gouvernent la forme de certaines figures seulement: dans cette énigme gît sans doute, pour l'esprit de la civilisation mésopotamienne, le secret de leur puissance.

NOTES

1. L'analyse de Quido Vetter [1936, 692–702], n'ajoute rien à la présente discussion.

2. L'hypothèse que nous allons présenter, relative à la manière dont les Babyloniens ont pu construire ce problème, doit beaucoup aux suggestions que nous avait communiquées aimablement le regretté Professeur J. Itard, à la mémoire duquel nous voulons ici rendre hommage. Dans sa Préface à l'ouvrage de R. Noguès [Itard 1966], cet auteur évoque le problème des Six Frères de AO 17 264, comme généralisation du problème de la dichotomie de l'aire du trapèze par une parallèle aux bases. Le problème plus général de le partager en trois trapèzes équivalents a-t-il été envisagé par les calculateurs babyloniens? Le présent problème est généralisable à $2n$ frères, mais il n'est, selon J. Itard, qu'un substitut au problème de la trisection, servant de "porte de sortie" au Babylonien confronté à des difficultés insurmontables. Dans cette perspective, l'invraisemblable calcul des transversales a_2 et a_4 ne serait là que pour masquer l'échec de la trisection du trapèze. Le problème initial: trouver trois carrés en progression arithmétique restera classique chez les Arabes et en Occident. Léonard de Pise tentera de prouver que la généralisation à quatre carrés est impossible. Fermat posera nettement ce problème qui relève de sa technique de la "descente infinie" (cf. [Itard 1967, 112–113]).

3. La tablette Plimpton 322, de la Collection de Columbia University, a été publiée et commentée par Neugebauer et Sachs [1945, 38–42]. E. M. Bruins [1959, 89–95; 1962, 309 sq.] a montré que les nombres de la tablette peuvent être dérivés aisément des formules $\frac{1}{2}(n + 1/n)$, $\frac{1}{2}(n - 1/n)$, 1, à partir des tables d'inverses $(n, 1/n)$ utilisées par les scribes babyloniens. Les formules que nous proposons pour les "triplets pythagoriques" s'en déduisent par réduction au même dénominateur et multiplication par n impair. Ce sont celles-là même que Proclus attribue à Pythagore [Procli Diadochi 1873, commentaire à la Prop. 47, p. 428, 1.10 sq.]

4. La tablette du Musée de Berlin VAT 8512 comporte la dichotomie du trapèze, qui sert à y résoudre un problème portant sur le triangle qui subsiste quand on ôte au trapèze un parallélogramme, rapprochement intéressant avec notre problème. La tablette de l'Ermitage de Léningrad 015-189 porte sur un ensemble de dix paires de trapèzes; le tableau de nombres obtenu pour les bases et les transversales contient tous les nombres qui figurent dans le nôtre, plus quelques autres en raison de certaines particularités du problème (n fractionnaire). Les tablettes YBC 4675, de Yale University, VAT 7535 n°1, VAT 7621 donnent aussi des valeurs figurant dans notre tableau (les valeurs 1, 5, 7, 13, 17 se retrouvent en toutes et semblent triviales). Cf. à ce propos [Vogel 1959, 71–73]. Sur le lien entre ce genre de problèmes et Diophante, II,19 et III,7, cf. [Gandz 1948, 22 sq].

5. On pourrait se demander si tout ce problème n'est pas simplement en relation avec l'emploi d'une formule erronée et archaïque pour le calcul de l'aire du trapèze, par exemple:

$$S = \frac{a+b}{2} \times \frac{c+d}{2},$$

formule qui ne fait intervenir que les côtés et qui conserve l'égalité des aires des trapèzes délimités par une parallèle aux bases de longueur $(a + b)/2$. La notion de hauteur, donc de perpendiculaire, serait absente. Cependant le niveau mathématique atteint paraît évidemment supérieur. La recherche systématique des triplets pythagoriques dans Plimpton 322 et leur utilisation dans AO 17 264 et ailleurs montre que les Babyloniens avaient au moins aperçu la difficulté d'exprimer exactement certaines grandeurs, notamment dans le triangle rectangle, et qu'ils avaient le souci d'éviter les approximations auxquelles, seule avec certaines divisions, pouvait donner lieu l'extraction de racines carrées, et cela malgré les très bonnes approximations qu'ils connaissaient et qui sont rapidement obtenues en système sexagésimal. Comme la formule de l'aire du trapèze résulte immédiatement de celle du triangle, nous penchons donc pour l'opinion que l'auteur de notre problème savait (1) que la hauteur de son trapèze était une longueur qu'on ne parvenait pas à calculer exactement, (2) que l'aire était dans le même cas. De là son problème: répondre aux questions initiales par la détermination de grandeurs calculables.

REFERENCES

Bruins, E. M. 1952. *Nouvelles découvertes sur les mathématiques babyloniennes*. Alençon: Conférences du Palais de la Découverte.

——— 1959. Neuere Ergebnisse zur Babylonischen Arithmetik. *Praxis der Mathematik* **1**, 89–95.

——— 1962. Interpretation of cuneiform Mathematics. *Physis* **4**(4) 277–341.

Friberg, J. 1981. Methods and traditions of Babylonian mathematics: Plimpton 322, Pythagorean triples, and the Babylonian triangle parameter equations. *Historia Mathematica* **8**(3), 277–318.

Gandz, S. 1948. Studies in Babylonian mathematics. I. Indeterminate analysis in Babylonian mathematics. *Osiris* **8**, 12–40.

Itard, J. 1966. Préface à R. Nogues, *Le théorème de Fermat, son histoire*. Paris.

——— 1967. *Arithmétique et théorie des nombres*. Paris: Presses Universitaires de France.

Neugebauer, O. 1935. *Mathematische Keilschrift-Texte*. Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik, Vol. 3, Abt. A. Berlin.

Neugebauer, O., & Sachs, A. 1945. *Mathematical cuneiform texts*. New Haven, Conn.

Procli Diadochi. 1873. *In primum Euclidis Elementorum librum Commentarii*. G. Friedlein, ed. Leipzig: "Bibliotheca Teubneriana."

Thureau-Dangin, F. 1934. La tablette AO 17264. *Revue d'Assyriologie et d'Archéologie orientale* **31**, 61 sq.

——— 1938. *Textes mathématiques babyloniens*. Leiden.

Vetter, Q. 1936. Quatre notes sur les mathématiques babyloniennes. *Osiris* **1**, 692–702.

Vogel, K. 1959. *Vorgriechische Mathematik II: Die Mathematik der Babylonier*. Hannover/Paderborn.